Chapter 4.

EUCLIDEAN VECTOR SPACES

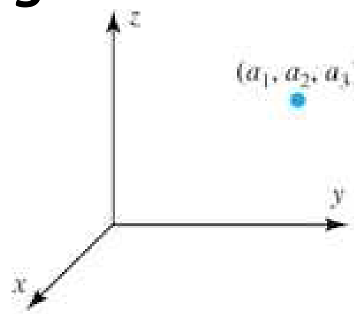
- EUCLIDEAN n –SPACE
- LINEAR TRANSFORMATION R^n to R^m
- PROPERTIES OF LINEAR TRANSFROMATION R^n to R^m
- LINEAR TRANSFORMATI ONS AND POLYNOMIALS

Vektor Dalam Ruang Berdimensi n : R^n

Jika n adalah suatu bilangan bulat positif, maka ganda n berurut adalah sederet n bilangan real ***$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$* . *Himpunan semua ganda n berurut disebut ruang berdimensi n dan dinyatakan*** **R^n .**

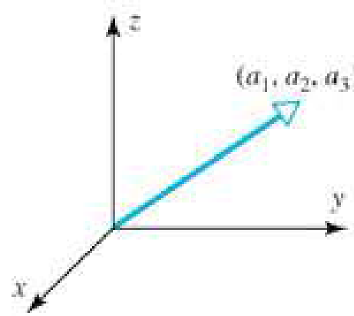
Ex : R^3 : ***(a_1, a_2, a_3)***

Pasangan tiga berurut bisa diintepretasikan secara geometris sebagai suatu titik atau vektor



(a)

coordinate



(b)

vector

Definisi

Dua vektor **u**=($u_1, u_2, \ldots, u_n$) dan **v**=($v_1, v_2, \ldots, v_n$) dalam R^n disebut equal jika

$$u_1 = v_1, \quad u_2 = v_2, \ldots, \quad u_n = v_n$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$

$$k\mathbf{u} = (ku_1, ku_2, \ldots, ku_n)$$

Operasi penambahan dan perkalian skalar pada definisi ini disebut ***standard operations*** pada R^n.

EUCLIDEAN n - SPACES

- Vektor nol (Zero vektor) pada R^n dinyatakan oleh $\mathbf{0}$ dan merupakan vektor $\mathbf{0}$=(0,0,…,0)
- Jika $\mathbf{u}=(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ adalah sebarang vektor di R^n , maka negatif (or kebalikan positif) dari u dinyatakan dgn $-\mathbf{u}$;

$$-\mathbf{u}=(-u_1, -u_2, \ldots, -u_n)$$

- Beda vektor pada R^n dinyatakan sbb:

$$\mathbf{v}-\mathbf{u}=\mathbf{v}+(-\mathbf{u})$$

$$\text{v-u} =(v_1-u_1, v_2-u_2, \ldots, v_n-u_n)$$

Sifat-sifat Operasi Vektor pada Ruang Berdimensi n - R^n

- Jika $\mathbf{u}=(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\mathbf{v}=(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, dan $\mathbf{w}=(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ adalah vektor-vektor pada R^n dan k dan l adalah skalar, maka:

(a) $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$

(b) $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = (\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$

(c) $\mathbf{u}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{u} = \mathbf{u}$

(d) $\mathbf{u}+(-\mathbf{u}) = 0$; that is $\mathbf{u}-\mathbf{u} = 0$

(e) $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$

(f) $k(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = k\mathbf{u}+k\mathbf{v}$

(g) $(k+l)\mathbf{u} = k\mathbf{u}+l\mathbf{u}$

(h) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Hasil Kali dalam Euclidean

- Jika $\mathbf{u}=(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\mathbf{v}=(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ adalah vektor-vektor dalam R^n, maka **Euclidean Inner Product $\mathbf{u}$ $\mathbf{v}$** dinyatakan oleh

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n}$$

1. EUCLIDEAN n - SPACES

Contoh:

- Perkalian titik Euclidean pada vektor

  u=(-1,3,5,7) dan **v**=(5,-4,7,0)

  pada R^4 adalah

- Jawab :
- **u** **v**=(-1)(5)+(3)(-4)+(5)(7)+(7)(0)=18

Hitung perkalian titik Euclidean berikut;

a. $\mathbf{u} = (2, 8, 2)$ $\mathbf{v} = (0, 1, 3)$

b. $\mathbf{u} = (3, 1, 4, -5)$ $\mathbf{v} = (2, 2, -4, -3)$

c. $\mathbf{u} = (-1, 1, 0, 4, -3)$ $\mathbf{v} = (-2, -2, 0, 2, -1)$

Sifat-sifat dari Perkalian Titik Euclidean

- Jika $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ dan $\mathbf{w}$ are vektor in R^n dan k sebarang skalar, maka

  (a) $\mathbf{u}\ \ \mathbf{v} = \mathbf{v}\ \ \mathbf{u}$

  (b) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\ \ \mathbf{w} = \mathbf{u}\ \ \mathbf{w} + \mathbf{v}\ \ \mathbf{w}$

  (c) $(k\,\mathbf{u})\ \ \mathbf{v} = k(\mathbf{u}\ \ \mathbf{v})$

  (d) $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} \geq 0$ lebih jauh ,$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = 0$ Jika dan hanya jika **v=**0

Contoh 2

$$(3\mathbf{u}+2\mathbf{v})\;\;(4\mathbf{u}+\mathbf{v}) = (3\mathbf{u})\;\;(4\mathbf{u}+\mathbf{v})+(2\mathbf{v})\;\;(4\mathbf{u}+\mathbf{v})$$

$$= (3\mathbf{u})\;\;(4\mathbf{u})+(3\mathbf{u})\;\;\mathbf{v}\;\;\;+(2\mathbf{v})\;\;(4\mathbf{u})+(2\mathbf{v})\;\;\mathbf{v}$$

$$=12(\mathbf{u}\;\;\mathbf{u})+11(\mathbf{u}\;\;\mathbf{v})+2(\mathbf{v}\;\;\mathbf{v})$$

Norma/Panjang dan Jarak pada Ruang berdimensi-*n* Euclidean

- Norma/Panjang Euclid dari suatu vektor $\mathbf{u}=(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ pada R^n dengan

$$\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})^{1/2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}$$

- Jarak Euclid antara dua titik $\mathbf{u}=(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dan $\mathbf{v}=(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ pada $\boldsymbol{R}^n$ dinyatakan oleh

$$d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1-v_1)^2 + (u_2-v_2)^2 + \ldots + (u_n-v_n)^2}$$

1. EUCLIDEAN n - SPACES

Contoh :

- Jika **u**=(1,3,-2,7) dan **v**=(0,7,2,2), maka pada ruang berdimensi Euclidean R^4

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(1)^2+(3)^2+(-2)^2+(7)^2} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$$

dan

$$d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \sqrt{(1-0)^2+(3-7)^2+(-2-2)^2+(7-2)^2}$$

1. EUCLIDEAN n - SPACES

Hitung Euclidean Norm of the vector :

1. v= (3,4,0, -12)
2. u = (-2,1,1,-3,4)

Hitung Euclidean Distance between u and v:

1. $\mathbf{u} = (2, -2, 2)$ $\mathbf{v} = (0, 4, -2)$
2. $\mathbf{u} = (0, -2, -1, 1)$ $\mathbf{v} = (-3, 2, 4, 4)$
3. $\mathbf{u} = (3, -3, -2, 0, -3)$ $\mathbf{v} = (-4, 1, -1, 5, 0)$

Ketaksamaan Cauchy-Schwarz pada R^n

- Jika $\mathbf{u}=(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dan $\mathbf{v}=(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ adalah vektor in R^n, maka

$$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$$

In each part, verify that the Cauchy–Schwarz inequality holds:

1. $\mathbf{u}=(-3, 1, 0)\quad \mathbf{v}=(2, -1, 3)$
2. $\mathbf{u}=(-4, 2, 1)\quad \mathbf{v}=(8, -4, -2)$
3. $\mathbf{u}=(0, -2, 2, 1)\quad \mathbf{v}=(-1, -1, 1, 1)$

Sifat-sifat panjang dan jarak pada R^n

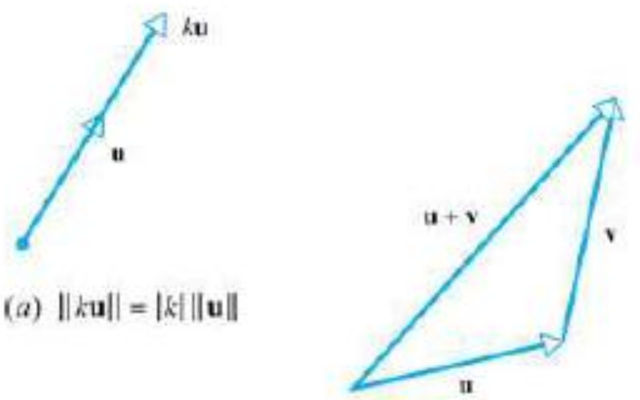
- Jika **u** dan **v** adalah vektor pada R^n dan k adalah sebarang skalar, maka

  (a) $\|\mathbf{u}\| \geq 0$

  (b) $\|\mathbf{u}\| = 0$ **jika dan hanya jika** $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

  (c) $\|k\mathbf{u}\| = |k|\|\mathbf{u}\|$

  (d) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ **(Ketaksamaan Segitiga)**



(a) $\|k\mathbf{u}\| = |k|\,\|\mathbf{u}\|$

(b) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

Sifat-sifat Jarak pada R^n

- Jika $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, dan $\mathbf{w}$ adalah vektor pada R^n dan k sebarang skalar, maka:

(a) $d(\mathbf{u},\mathbf{v}) \geq 0$

(b) $d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{u} = \mathbf{v}$

(c) $d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = d(\mathbf{v},\mathbf{u})$

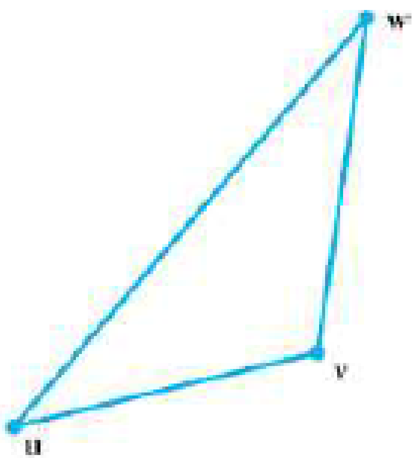
(d) $d(\mathbf{u},\mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u},\mathbf{w}) + d(\mathbf{w},\mathbf{v})$ (Ketaksamaan segitiga)

1. EUCLIDEAN n - SPACES

Teorema

- Jika $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ adalah vektor pada R^n dengan hasil kali dalam Euclidean, maka

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{4}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2$$



$d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + d(\mathbf{v}, \mathbf{w})$

Definisi Keorthogonalan

- Dua vektor **u** dan **v** pada R^n disebut orthogonal Jika **u** **v**=0

Pada ruang Euclidean R^4 vektor

$$\mathbf{u} = (-2, 3, 1, 4) \text{ dan } \mathbf{v} = (1, 2, 0, -1)$$

orthogonal , karena

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-2)(1) + (3)(2) + (1)(0) + (4)(-1) = 0$$

Teorema Pythagoras pada R^n

Jika $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah vektor orthogonal pada R^n dengan hasil kali dalam Euclidean, maka

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$

Notasi Alternatif untuk vektor pada R^n

Vektor $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ di $\mathbf{R}^n$ bisa ditulis dalam notasi matriks sebagai matriks baris atau matriks column

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \ldots & \mathbf{u}_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n + \mathbf{v}_n \end{bmatrix}, \qquad k\mathbf{u} = k\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\mathbf{u}_1 \\ k\mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ k\mathbf{u}_n \end{bmatrix}$$

Notasi Alternatif untuk vektor pada R^n

atau

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} u_1+v_1 & u_2+v_1 & \ldots & u_n+v_n \end{bmatrix}$$

$$k\mathbf{u} = k\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ku_1 & ku_2 & \ldots & ku_n \end{bmatrix}$$

menghasilkan nilai yang sama dengan operasi vektor

$$\mathrm{u}+\mathbf{v} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$
$$= (u_1+v_1,\ u_2+v_2,\ \ldots,\ u_n+v_n)$$

Formula Matriks untuk perkalian titik

If we use column matrix notation for the vectors

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \end{bmatrix} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

Thus, for vectors in column matrix notation we have the following formula for the Euclidean inner product

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}$$

Formula Matriks untuk perkalian Titik

If A is a $n \times n$ matrix, then properties of the transpose that

$$\mathrm{A}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}^T(\mathrm{A}\mathbf{u}) = (\mathbf{v}^T \mathrm{A})\mathbf{u} = (A^T\mathbf{v})^T\mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}$$

$$\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} = (A\mathbf{v})^T \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{v}^T A^T)\mathbf{u} = \mathbf{v}^T(A^T\mathbf{u}) = A^T\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

$$A\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot A^T\mathbf{v}$$

$$\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} = A^T\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

Formula Matriks untuk perkalian Titik

Contoh

$$A\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{u}\cdot A^T\mathbf{v}$$

Misalkan bahwa :

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{u}=\begin{bmatrix}-1\\ 2\\ 4\end{bmatrix},\quad \mathbf{v}=\begin{bmatrix}-2\\ 0\\ 5\end{bmatrix}$$

Maka

$$A\mathbf{u}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 2\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\ 10\\ 5\end{bmatrix}$$

$$A^T\mathbf{v}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & 4 & 0\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ 0\\ 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7\\ 4\\ -1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\qquad A\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=7(-2)+10(0)+5(5)=11$$

$$\mathbf{u}\cdot A^T\mathbf{v}=(-1)(-7)+2(4)+4(-1)=11$$

Pandangan hasil kali titik mengenai perkalian matriks

Jika $A = [a_{ij}]$ adalah sebuah matriks $m \times r$ dan $B = [b_{ij}]$ adalah sebuah matriks $r \times n$, maka anggota ke-ij dari AB adalah

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ir}b_{rj}$$

yang merupakan hasil kali titik dari vektor A bari ke-i.

$$[a_{i1} \quad a_{i2} \quad \ldots \quad a_{ir}]$$

dan vektor B kolom ke-j.

$$\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{rj} \end{bmatrix}$$

Thus, if the row vectors of A are $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m$ and the column vectors of B are $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$, then the matrix product AB can be expressed as

$$AB = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{c}_1 & \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{c}_n \\ \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{c}_1 & \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{c}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{r}_m \cdot \mathbf{c}_1 & \mathbf{r}_m \cdot \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{r}_m \cdot \mathbf{c}_n \end{bmatrix} \tag{10}$$

A linear system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ can be expressed in dot product form as

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m \cdot \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{11}$$

where $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m$ are the row vectors of A, and $b_1, b_2, \ldots, b_m$ are the entries of $\mathbf{b}$

Contoh:

Sistem

$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + \quad x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 7x_2 - 4x_3 &= 5 \\ x_1 - 5x_2 - 8x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Bentuk Perkalian Titik

$$\begin{bmatrix} (3,-4,1)\cdot(x_1, x_2, x_3) \\ (2,-7,-4)\cdot(x_1, x_2, x_3) \\ (1,5,-8)\cdot(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Transformasi Linier
R^n to R^m

Fungsi berbentuk **w = f(x)** dimana:

- peubah bebas **x** : vektor dalam $\mathbf{R}^n$
- peubah tak bebas **w** :vektor dalam $\mathbf{R}^m$

Transformasi Linier R^n to R^m

codomain of f

domain of f

$$b = f(a)$$

Function is a rule f that associates with each element in a set A one and only one element in a set B

Transformasi Linier R^n to R^m

Fungsi dari R^n ke R

Formula	Contoh	Klasifikasi	Deskripsi
$f(x)$	$f(x) = x^2$	Fungsi bernilai real dari suatu peubah real	Fungsi dari R ke R
$f(x, y)$	$f(x, y) = x^2 + y^2$	Fungsi bernilai real dari dua peubah real	Fungsi dari R^2 ke R
$f(x, y, z)$	$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$	Fungsi bernilai real dari tiga peubah real	Fungsi dari R^3 ke R
$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$	$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$	Fungsi bernilai real dari n peubah real	Fungsi dari R^n ke R

Fungsi-fungsi dari R^n ke R^m

- Jika domain dari suatu fungsi f adalah R^n dan kodomain adalah R^m, maka f disebut sebuah map atau transformasi dari R^n ke R^m , dan kita menyatakan bahwa fungsi **f maps R^n ke R^m**. Kita tuliskan dengan

$$f : R^n \to R^m$$

Pada kasus dimana $m=n$ transformasi $f : R^n \to R^m$ adalah disebut suatu operator pada R^n

Transformasi Linier R^n to R^m

- Misalkan $f_1, f_2, \ldots, f_m$ adalah fungsi bilangan riil dengan n variabel, dimana;

$$
\begin{aligned}
w_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\ d \\
w_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
\vdots & \qquad \vdots \\
w_m &= f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)
\end{aligned}
$$

Persamaan-persamaan m diatas menempatkan suatu titik unik $(w_1, w_2, \ldots, w_m)$ dalam R^m setiap titik $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dalam R^n dan dengan demikian mendefinisikan suatu transformasi dari R^n ke R^m. Jika kita menyatakan transformasi ini dengan T, maka $R^n \to R^m$ dan

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$$

Contoh 1:

The equations

$$w_1 = x_1 + x_2$$
$$w_2 = 3x_1x_2$$
$$w_3 = x_1^2 - x_2^2$$

define a transformation $T: R^2 \to R^3$.

$$\Rightarrow T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 3x_1x_2, x_1^2 - x_2^2)$$

Thus, for example, $T(1, -2) = (-1, -6, -3)$

Transformasi Linier R^n to R^m

$$T : R^n \longrightarrow R^m$$

if n = m : linier transformation

Suatu transformasi linier $T : R^n \rightarrow R^m$ didefinisikan oleh persamaan berbentuk:

$$\begin{aligned}
w_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\
w_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\
&\vdots \\
w_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

w = Ax

Matriks ***$A=[a_{ij}]$*** disebut **Matriks Standar** untuk transformasi linier *T*, dan ***T*** disebut **perkalian dengan A.**

Beberapa masalah notasi

- Kita menyatakan transformasi linear $T = R^n \to R^m$ dg $T_A = R^n \to R^m$ dimana,

$$T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

Vektor $\mathbf{x}$ dinyatakan dalam suatu matrik kolom.

Jika matrik standar utk T dinyatakan dengan simbol $[T]$, maka

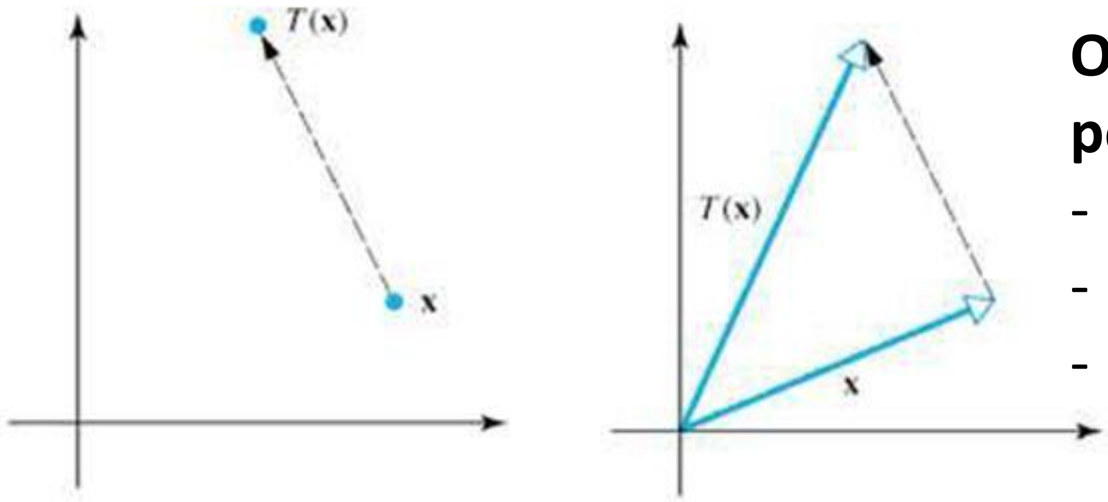
$$T(\mathbf{x}) = [T]\mathbf{x}$$

Kadangkala, dua notasi untuk matriks standar akan dicampur, dimana kita mempunyai hubungan :

$$[T_A] = A$$

Transformasi Linier R^n to R^m

Geometry of Linear Transformations



(a) T maps points to points (b) T maps vectors to vectors

Operasi Linier yang penting pada R^2 ke R^3 :

- **Pencerminan**
- **Proyeksi**
- **Rotasi**

Misal :

$T_0(x)$ = 0x=0

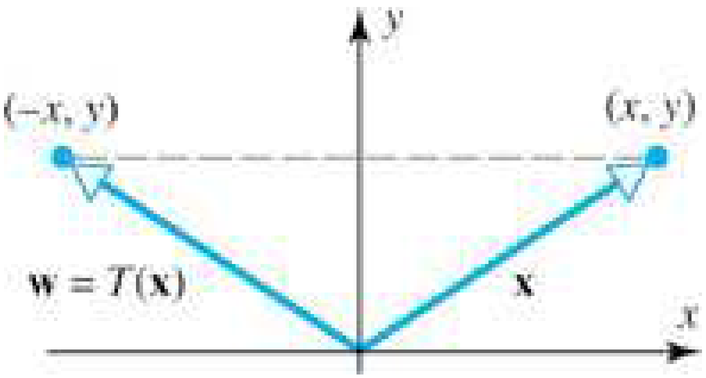
→ zero transformation from R^n to R^m.

$T_I(x)$ = Ix=x

→ identity operator on R^n.

Operator Pencerminan

- Secara umum R^2 dan R^3 yang memetakan setiap vektor bayangan simetrisnya terhadap suatu garis atau bidang disebut operators pencerminan. Operator-operator tersebut linear.



$$w_1 = -x = -x + 0y$$
$$w_2 = \quad y = 0x + y$$

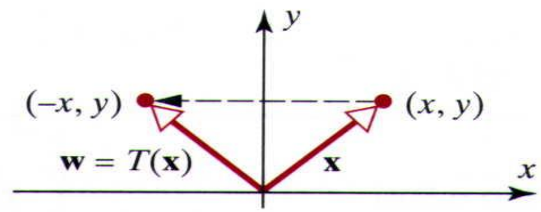
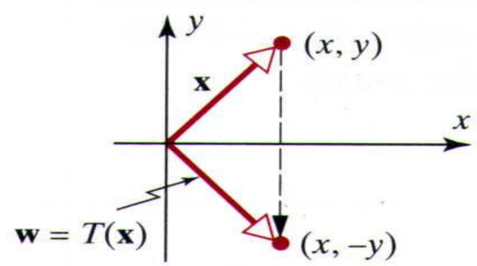
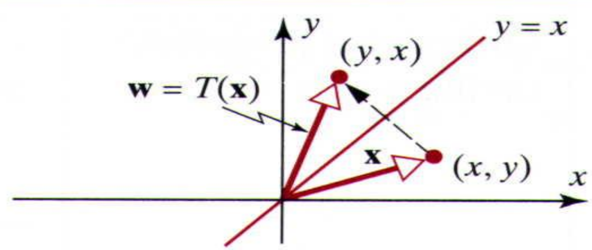
$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

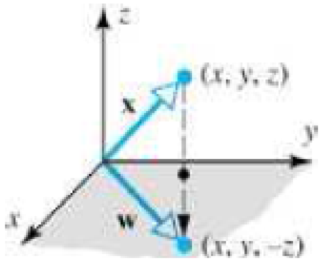
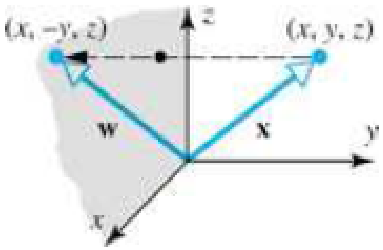
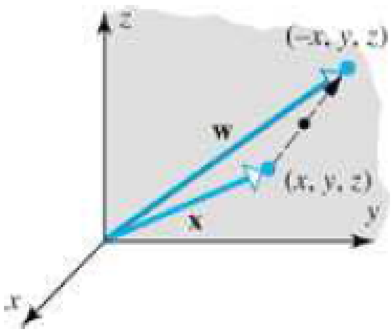
Transformasi Linier R^n to R^m

Operator R2 dan R3 yang memetakan setiap vektor ke bayangan simetrisnya terhadap suatu garis atau bidang disebut operator pencerminan yang bersifat linier

TABLE 2

Operator	Illustration	Equations	Standard Matrix
Reflection about the y-axis		$w_1 = -x$ $w_2 = y$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Reflection about the x-axis		$w_1 = x$ $w_2 = -y$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Reflection about the line $y = x$		$w_1 = y$ $w_2 = x$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Transformasi Linier R^n to R^m

Operator	Illustration	Equations	Standard Matrix
Reflection about the xy-plane		$w_1 = x$ $w_2 = y$ $w_3 = -z$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
Reflection about the xz-plane		$w_1 = x$ $w_2 = -y$ $w_3 = z$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Reflection about the yz-plane		$w_1 = -x$ $w_2 = y$ $w_3 = z$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Transformasi Linier R^n to R^m

Use matrix multiplication to find the reflection of (1,3) about x –axis.

$$T(1,3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

So the reflection of (1,3) is (1,-3).

Find :
-Reflection on y-axis
-Reflection on the line y=x

Use matrix multiplication to find the reflection of (2, −5, 3) about the xy -plane

$$T(2,-5,3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

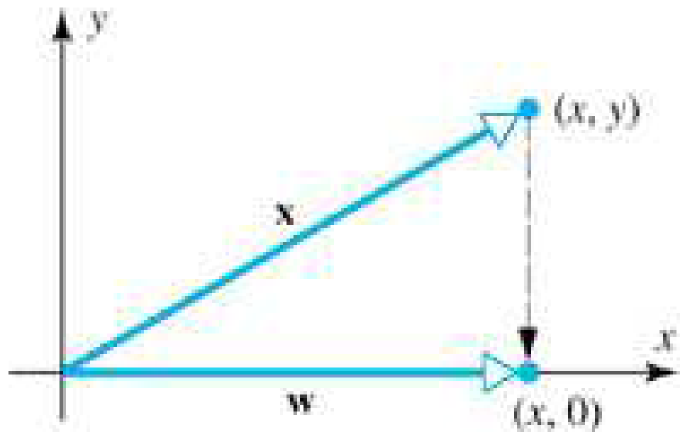
so the reflection of (2, –5, 3) is (2, –5, –3).

Find :
-Reflection on xz-plane
-Reflection on yz-plane

Transformasi Linier R^n to R^m

Operator Proyeksi

Tinjau Operator T : $R^2 \rightarrow R^2$ yang memetakan setiap vektor ke proyeksi orthogonalnya pada *x-axis. Persamaan yang menghubungkan komponen **x** **dan w=T(x) adalah;***



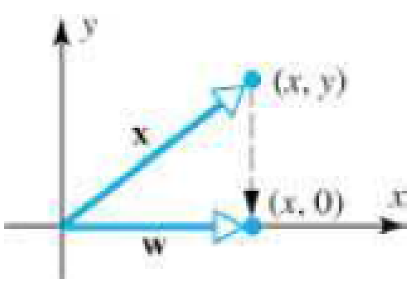
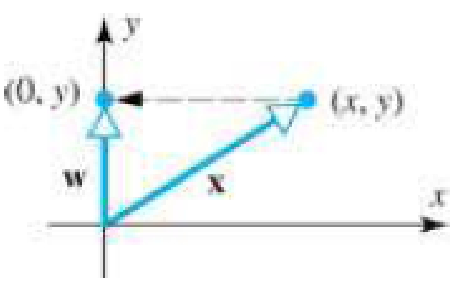
$$w_1 = x = x + 0y$$
$$w_2 = 0 = 0x + 0y$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

T adalah operator linier dan matriks standard T : $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

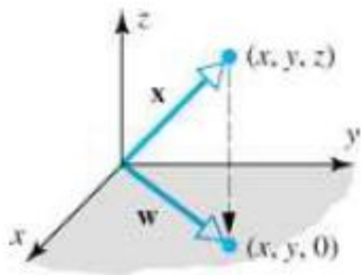
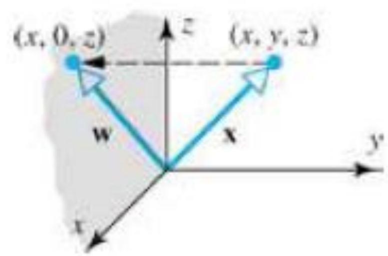
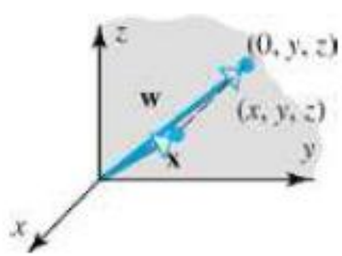
Secara umum, sebuah operasi proyeksi (atau lebih tepatnya operator projeksi orthogonal) pada R^2 atau R^3 adalah sebarang operator yang memetakan setiap vektor ke proyeksi ortogonalnya pada suatu garis atau bidang yang melalui titik asal.

Basic Projections Operators on R^2

Operator	Illustration	Equations	Standard Matrix
Orthogonal projection on the x-axis		$w_1 = x$ $w_2 = 0$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Orthogonal projection on the y-axis		$w_1 = 0$ $w_2 = y$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

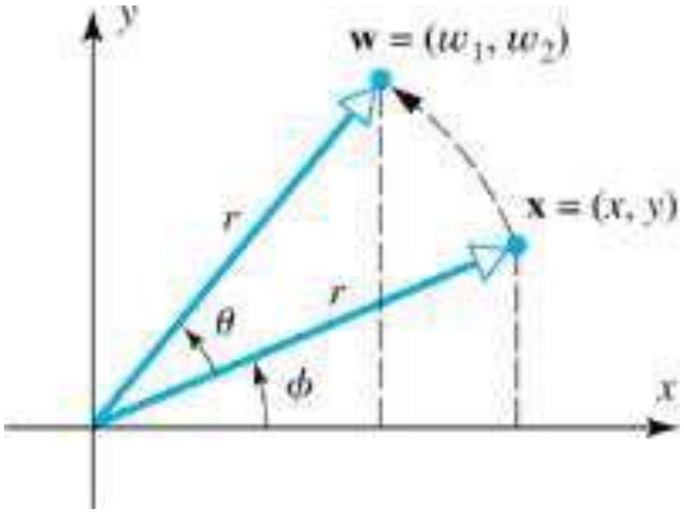
Transformasi Linier R^n to R^m

Basic Projections Operators on R^2

Operator	Illustration	Equations	Standard Matrix
Orthogonal projection on the xy-plane		$w_1 = x$ $w_2 = y$ $w_3 = 0$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Orthogonal projection on the xz-plane		$w_1 = x$ $w_2 = 0$ $w_3 = z$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Orthogonal projection on the yz-plane		$w_1 = 0$ $w_2 = y$ $w_3 = z$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Operator Rotasi

- Operasi yang merotasikan setiap vektor dalam R^2 melalui sudut θ tetap disebut operator rotasi pada R^2.
- Untuk menunjukkan bagaimana hasil-hasil ini diturunkan, tinjau operator rotasi yg merotasikan setiap vektor berlawanan dgn jarum jam pd suatu sudut tetap θ . Untuk mencari persamaan yang menghubungkan **x dan w = T (x)**, Anggap ϕ adalah sudut sumbu-x positif ke **x** dan anggap panjang **x** dan **w** masing-masing adalah **r**.



Transformasi Linier R^n to R^m

Rotation Operators

Maka dari trigonometri dasar

$$x = r\cos\phi, \qquad y = r\sin\phi \tag{14}$$

$$w_1 = r\cos(\theta+\phi), \qquad w_2 = r\sin(\theta+\phi) \tag{15}$$

dengan menggunakan identitas trigoneometri pada (15) didapat,

$$w_1 = r\cos\theta\cos\phi - r\sin\theta\sin\phi$$

$$w_1 = r\sin\theta\cos\phi + r\cos\theta\sin\phi$$

dan mensubtitusi (14) menghasilkan

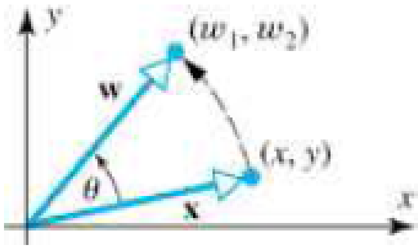
$$w_1 = x\cos\theta - y\sin\theta \tag{16}$$

$$w_2 = x\sin\theta + y\cos\theta$$

$\Rightarrow$ Matriks standar untuk T adalah

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Rotation Operators

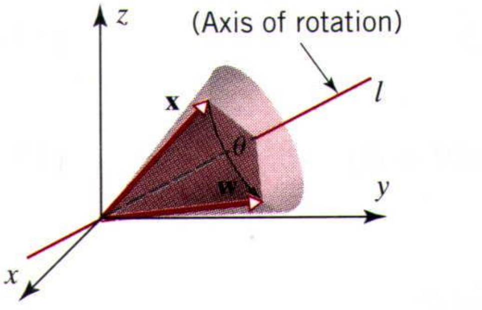
Operator	Illustration	Equations	Standard Matrix
Rotation through an angle θ		$w_1 = x\cos\theta - y\sin\theta$ $w_2 = x\sin\theta + y\cos\theta$	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

Vektor rotasi pada R^3

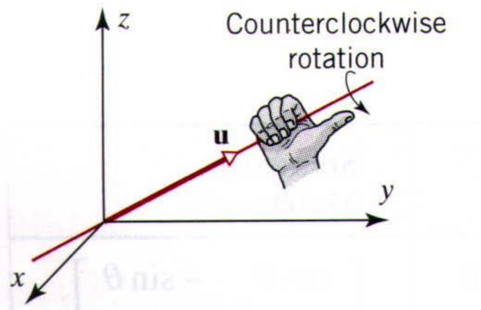
Rotasi vektor pada R^3 diuraikan sebagai sinar yang berasal dari titik asal yang disebut sumbu rotasi.

Sudut rotasi diukur searah jarum jam atau berlawanan arah dengan jarum jam .

Misal vektor w dihasilkan dengan merotasi vektor x berlawanan arah jarum jam terhadap sumbu l dengan sudut θ *.*
Sudut positif jika rotasi berlawanan arah jarum jam dan negatif jika searah dengan jarum jam.



(a) Angle of rotation

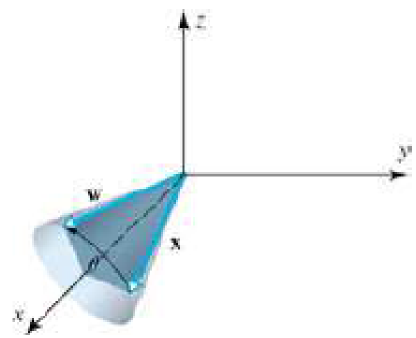
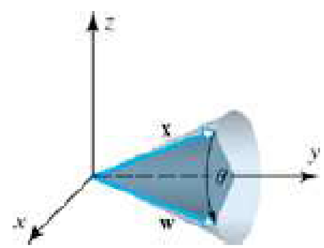
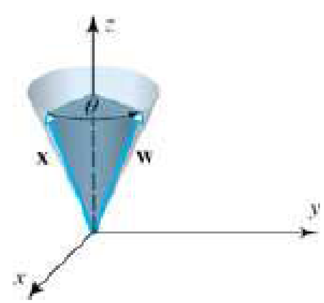


(b) Right-hand rule

Figure 4.2.5

Vektor rotasi pada R^3

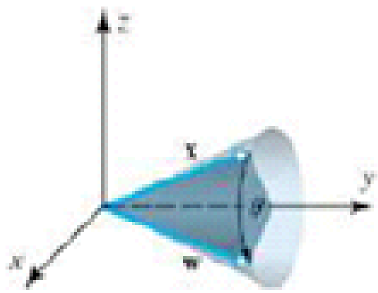
- *Operator Rotasi R^3 merupakan operator linier yang merotasikan setiap vektor dalam R^3 terhadap beberapa sumbu rotasi dengan suatu sudut tetap* θ

Operator	Illustration	Equations	Standard Matrix
Counterclockwise rotation about the positive x-axis through an angle θ		$w_1 = x$ $w_2 = y\cos\theta - z\sin\theta$ $w_3 = y\sin\theta + z\cos\theta$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$
Counterclockwise rotation about the positive y-axis through an angle θ		$w_1 = x\cos\theta + z\sin\theta$ $w_2 = y$ $w_3 = -x\sin\theta + z\cos\theta$	$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$
Counterclockwise rotation about the positive z-axis through an angle θ		$w_1 = x\cos\theta - y\sin\theta$ $w_2 = x\sin\theta + y\cos\theta$ $w_3 = z$	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Transformasi Linier R^n to R^m

Gunakan perkalian matriks untuk mencari bayangan vektor (−2, 1, 2) jika dirotasikan berlawanan arah jarum jam 45° terhadap sumbu y

Counterclockwise rotation about the positive y-axis through an angle θ



$$w_1 = x\cos\theta + z\sin\theta$$
$$w_2 = y$$
$$w_3 = -x\sin\theta + z\cos\theta$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos(45^\circ) & 0 & \sin(45^\circ) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(45^\circ) & 0 & \cos(45^\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Vektor rotasi pada *R*³

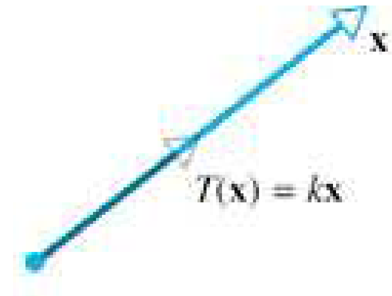
- Standard matriks untuk suatu rotasi berlawanan arah jarum jam dengan sudut terhadap suatu sumbu R^3, yang ditentukan oleh suatu vektor satuan $\mathbf{u} = (a, b, c)$ yang memiliki titik pangkal di pusat, adalah:

$$\begin{bmatrix} a^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & ab(1-\cos\theta)-c\sin\theta & ac(1-\cos\theta)+b\sin\theta \\ ab(1-\cos\theta)+c\sin\theta & b^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & bc(1-\cos\theta)-a\sin\theta \\ ac(1-\cos\theta)-b\sin\theta & bc(1-\cos\theta)+a\sin\theta & c^2(1-\cos\theta)+\cos\theta \end{bmatrix}$$

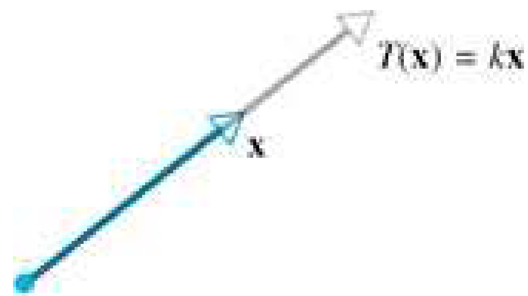
(simpelnya : tabel 7, dirotasikan thdp sumbu, bila dirotasikan terhadap vektor **u**, maka persamaannya spt diatas.

Operator Penyempitan dan Pelebaran

Jika k adalah suatu skalar non-negatif, maka operator pada R^2 atau R^3 disebut suatu penyempitan dengan faktor jika $0 \leq k \leq 1$ dan suatu pelebaran dengan faktor, jika $k \geq 1$.



(a) $0 \leq k < 1$



(b) $k > 1$

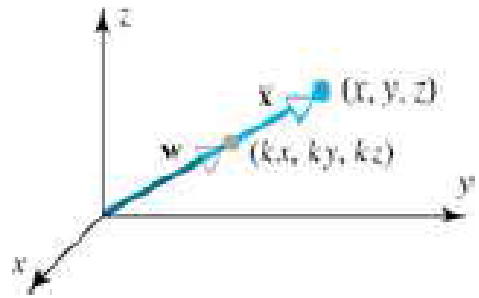
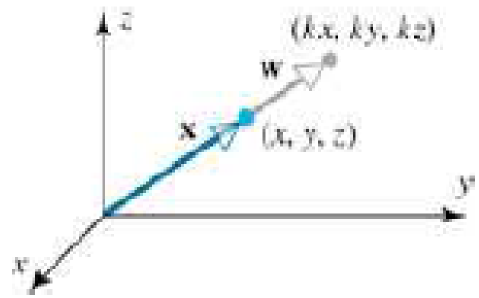
Transformasi Linier R^n to R^m

Operator Penyempitan dan Pelebaran

Operator	Illustration	Equations	Standard Matrix
Contraction with factor k on R^2 $(0 \le k \le 1)$		$w_1 = kx$ $w_2 = ky$	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$
Dilation with factor k on R^2 $(k \ge 1)$		$w_1 = kx$ $w_2 = ky$	

Transformasi Linier R^n to R^m

Operator Penyempitan dan Pelebaran

Operator	Illustration	Equations	Standard Matrix
Contraction with factor k on R^3 $(0 \le k \le 1)$		$w_1 = kx$ $w_2 = ky$ $w_3 = kz$	$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$
Dilation with factor k on R^3 $(k \ge 1)$		$w_1 = kx$ $w_2 = ky$ $w_3 = kz$	

Transformasi Linier R^n to R^m

Komposisi Transformasi Linear

Jika $T_A = R^n \rightarrow R^k$ dan $T_B = R^k \rightarrow R^m$ adalah transformasi linear, maka untuk setiap x pd R^n kita dapat menghitung dulu $T_A(x)$, yang merupakan vektor dalam R^k, dan kemudian kita bisa menghitung $T_B(T_A(x))$, yang merupakan vektor dlm R^m. Jadi, penerapan T_A diikuti oleh T_B yang menghasilkan transformasi R^n ke R^m. Tranformasi ini disebut KOMPOSISI T_B DENGAN T_A dan dinyatakan dengan $T_B \circ T_A$ (baca "T_B lingkaran T_A"). Thus

$$(T_B \circ T_A)(x) = T_B(T_A(x))$$

Komposisi $T_B \circ T_A$ adalah linear karena

$$(T_B \circ T_A)(x) = T_B(T_A(x)) = B(Ax) = (BA)x$$

$$\Rightarrow \qquad T_B \circ T_A = T_{BA}$$

Rumus ini dapat juga dituliskan dengan:

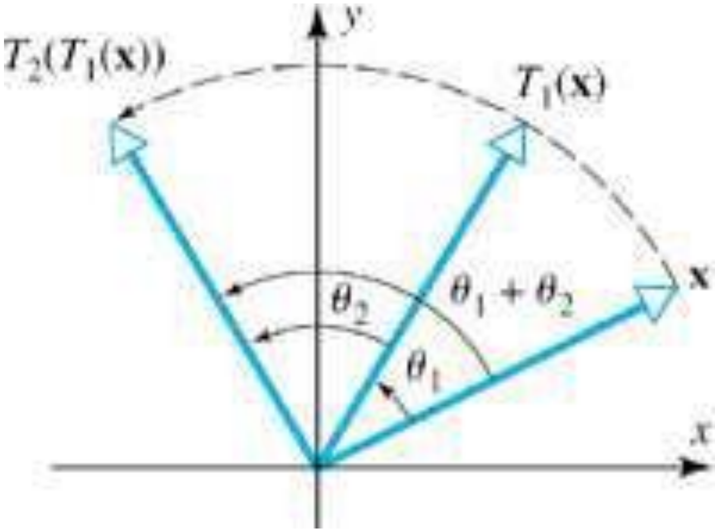
$$[T_2 \circ T_1] = [T_2][T_1]$$

Contoh : Komposisi 2 Rotasi

Let $T_1 : R^2 \longrightarrow R^2$ and $T_2 : R^2 \longrightarrow R^2$ be the linear operators that rotate vectors through the angles θ_1 and θ_2 respectively. Thus the operation

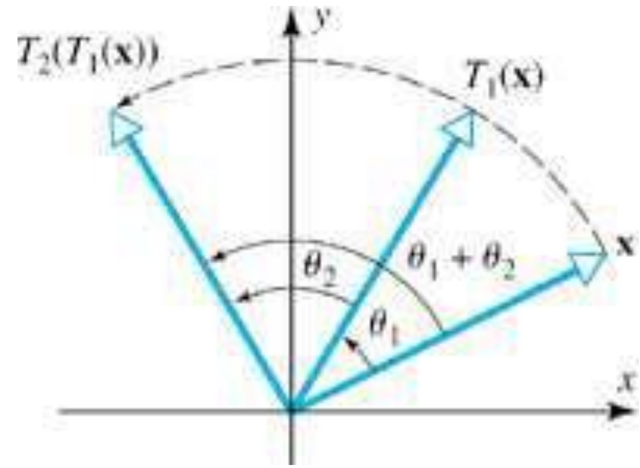
$$(T_2 \circ T_1)(\mathbf{x}) = T_2(T_1(\mathbf{x}))$$

first rotates ***x*** ***through the angle*** θ_1 ***, then rotates through the angle*** θ_2 ***. It follows that the net effect of*** $T_{2} \circ T_{1}$ ***is to rotate*** each vector in R^2 through the angle $\theta_1 + \theta_2$



Transformasi Linier R^n to R^m

The standard matrices for these linear operators are:



$$[T_1] = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}, \quad [T_2] = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix},$$

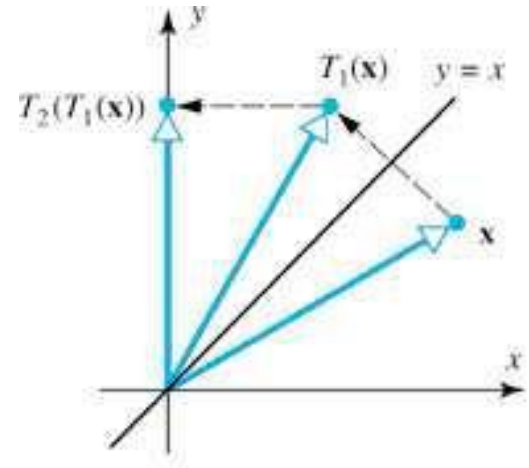
$$[T_2 \circ T_1] = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix}$$

With the help of some basic trigonometric identities, we can show that this is so as follows:

$$\begin{aligned}
[T_2][T_1] &= \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}, \\
&= \begin{bmatrix} \cos\theta_2\cos\theta_1 - \sin\theta_2\sin\theta_1 & -(\cos\theta_2\sin\theta_1 + \sin\theta_2\cos\theta_1 \\ \sin\theta_2\cos\theta_1 + \cos\theta_2\sin\theta_1 & -\sin\theta_2\sin\theta_1 + \cos\theta_2\cos\theta_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix} \\
&= [T_2 \circ T_1]
\end{aligned}$$

Contoh : Composition is not Comunicative

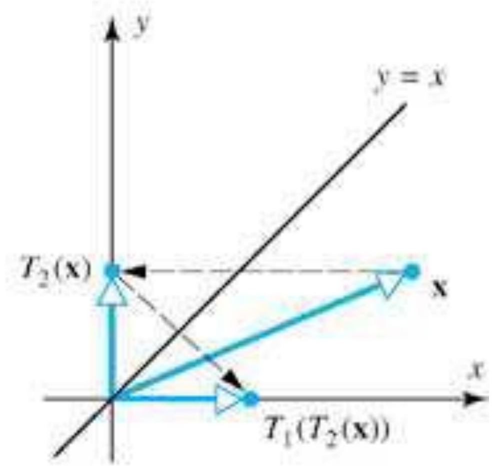
Jika $T_1 : R^2 \rightarrow R^2$ adalah operator pencerminan terhadap y=x , dan $T_2: R^2 \rightarrow R^2$ adalah proyeksi orthogonal terhdap *y-axis. Gambar disamping menunjukkan* $\boldsymbol{T_2 \circ T_1}$ dan $\boldsymbol{T_1 \circ T_2}$ *mempunyai dampak yang berbeda pada suatu vektor x. Artinya matriks – matriks standar untuk* T_1 *dan* T_2 *tidak komunitatif.*



(a) $T_2 \circ T_1$

$$[T_1 \circ T_2] = [T_1][T_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[T_2 \circ T_1] = [T_2][T_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



(b) $T_1 \circ T_2$

$$[T_2 \circ T_1] \neq [T_1 \circ T_2]$$

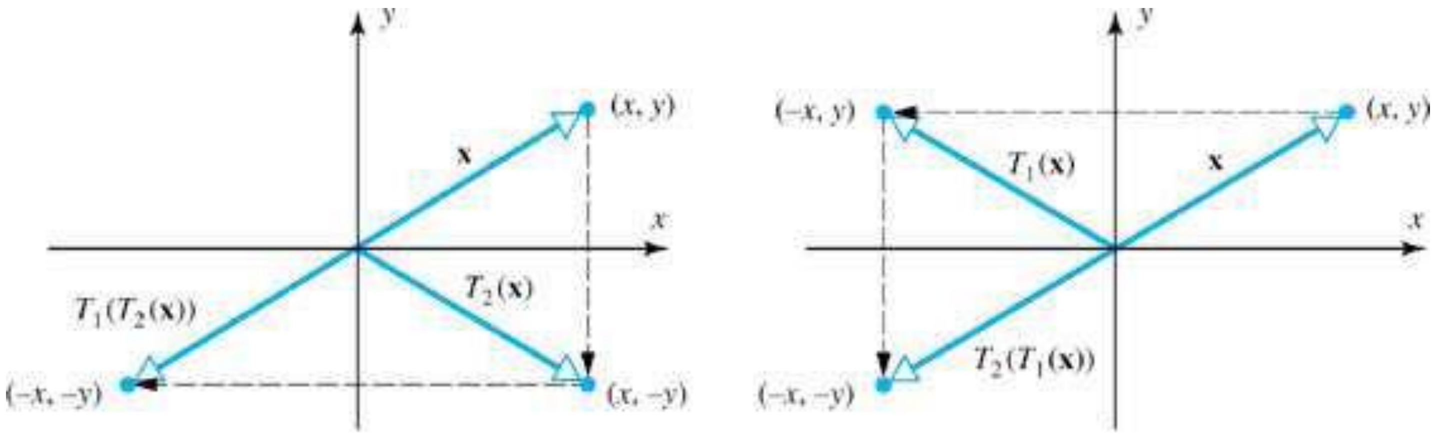
Transformasi Linier R^n to R^m

Contoh : Composition of Two Reflection

Jika $T_1 : R^2 \rightarrow R^2$ adalah pencerminan terhadap *y-axis, dan* $T_2 : R^2 \rightarrow R^2$ *pencerminan terhadap sumbu x.* $\boldsymbol{T_1 o T_2}$ ***and*** $\boldsymbol{T_2 o T_1}$ sama, keduanya memetakan setiap vektor x=(x,y) menjadi negatifnya –x=(-x.-y)

$$(T_1 \circ T_2)(x, y) = T_1(x, -y) = (-x, -y)$$

$$(T_2 \circ T_1)(x, y) = T_2(-x, y) = (-x, -y)$$



(a) $T_1 \circ T_2$ (b) $T_2 \circ T_1$

$$[T_1 \circ T_2] = [T_1][T_2] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[T_2 \circ T_1] = [T_2][T_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Transformasi Linier R^n to R^m

Kesamaan $T_1 \circ T_2$ dan $T_2 \circ T_1$ bisa juga didapatkan dengan menunjukkan bahwa matriks-matriks standard untuk T_1 dan T_2 komunitatif:

$$[T_1 \circ T_2] = [T_1][T_2] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[T_2 \circ T_1] = [T_2][T_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Operator T(x)=-x pada R^2 atau R^3 disebut pencerminan terhadap titik asal. Matriks standar untuk operator ini pada R^2 adalah

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Transformasi Linier R^n to R^m

Compositions of Three or More Linear Transformations

$$T_1 : R^n \longrightarrow R^k, \quad T_2 : R^k \longrightarrow R^l, \quad T_3 : R^l \longrightarrow R^m$$

We define the composition $(T_3 \circ T_2 \circ T_1) : R^n \longrightarrow R^m$ by

$$(T_3 \circ T_2 \circ T_1)(\mathbf{x}) = T_3(T_2(T_1(\mathbf{x})))$$

$$[T_3 \circ T_2 \circ T_1] = [T_3][T_2][T_1]$$

If the standard matrices for T_1, T_2, and T_3 are denoted by *A, B, and C*

$$T_C \circ T_B \circ T_A = T_{CBA}$$

Contoh : Composition of Three Transformation

Find the standard matrix for the linear operator T: $R^3 \rightarrow R^3$ that first rotates a vector counterclockwise about the *z-axis* through an angle θ, then reflects the resulting vector about the yz-plane, and then projects that vector orthogonally onto the xy- plane.

$$[T_3 \circ T_2 \circ T_1] = [T_3][T_2][T_1]$$

T_1 is the rotation about the *z-axis, T_2 is the reflection about the yz-plane, and T_3 is the orthogonal projection on the xy*-plane

$$[T_1] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [T_2] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [T_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Transformasi Linier R^n to R^m

Find the standard matrix for the stated composition of linear operators on R^2 a rotation of 60°, followed by an orthogonal projection on the *x-axis, followed by a reflection about the line y=x .*

$$T_1 = \begin{bmatrix} Cos\,60 & -sin60 \\ \sin 60 & \cos 60 \end{bmatrix} \qquad T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad T_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Transformasi Linier R^n to R^m

Find the standard matrix for the stated composition of linear operators on R^{3}:

- A rotation of 270° about the *x-axis,*
- *Ffollowed by a rotation of 90° about the y-axis,*
- *Followed by a rotation of 180°* about the *z-axis.*

$$\begin{bmatrix} \cos(180^\circ) & -\sin(180^\circ) & 0 \\ \sin(180^\circ) & \cos(180^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(90^\circ) & 0 & \sin(90^\circ) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(90^\circ) & 0 & \cos(90^\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(270^\circ) & -\sin(270^\circ) \\ 0 & \sin(270^\circ) & \cos(270^\circ) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

SIFAT-SIFAT TRANSFORMASI LINIER DARI R^n ke R^m

Transformasi Linear Satu-Satu

Transformasi linear $T = R^n \rightarrow R^m$ disebut satu satu jika T memetakan vektor-vektor (titik-titik) yang berbeda pada R^n ke vektor-vektor (titik-titik) yang berbeda pada R^m

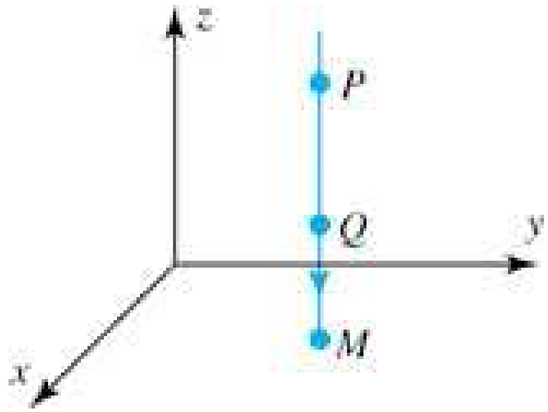


Figure 4.3.2
The distinct points *P and Q are mapped into the same point M.*

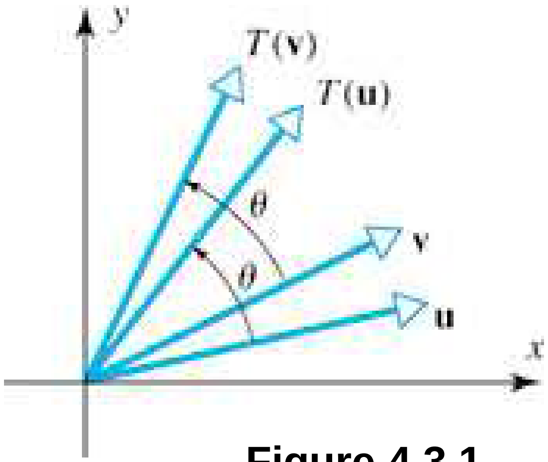


Figure 4.3.1
Distinct vectors ***u and v are rotated into distinct vectors*** $T_{(u)}$ ***and*** $T_{(v)}$.

Untuk setiap vektor w dalam daerah hasil transformasi linear satu-satu T, tepat ada satu vektor x sedemikian sehingga T(x)=w.

Properties of Linear Transformations from R^n to R^m

Jika A adalah nxn matrix dan T_A*:* $R^n \rightarrow R^n$ *adalah perkalian dengan A, maka pernyataan berikut ini ekuivalen:*

(a) A dapat dibalik ***(memiliki*** A^{-1}***)***

(b) Daerah hasil dari T_A adalah R^n

(c) T_A adalah satu-satu (→ u***ntuk setiap vektor w dalam daerah hasil transformasi linear satu-satu T, tepat ada satu vektor x sedemikian sehingga T(x)=w)***

Invers Operator Linier Satu Satu

Jika $T_A: R^n \rightarrow R^n$ adalah operator linier satu-satu, maka matriks A dapat diinvers. Jadi $T_A^{-1}: R^n \rightarrow R^n$ *adalah sebuah operator linier dan disebut Invers dari* T_A, dimana :

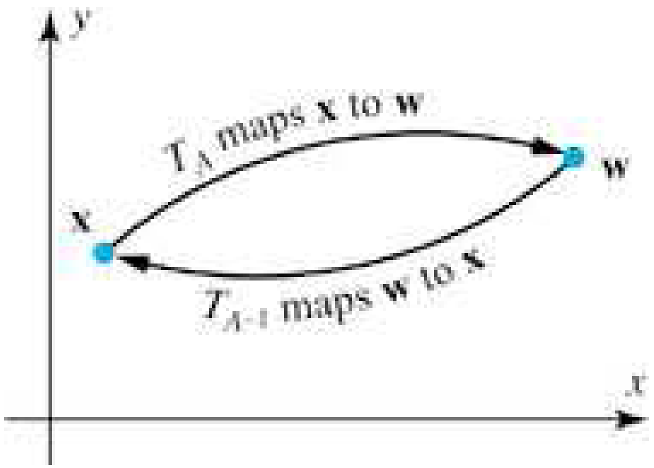
$$T_A(T_{A^{-1}}(\mathbf{x})) = AA^{-1}\mathbf{x} = I\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

$$T_{A^{-1}}(T_A(\mathbf{x})) = A^{-1}A\mathbf{x} = I\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

Secara equivalen ; ,

$$T_A \circ T_{A^{-1}} = T_{AA^{-1}} = T_I$$

$$T_{A^{-1}} \circ T_A = T_{A^{-1}A} = T_I$$



Jika ***w* adalah bayangan *x* dibawah** T_A***, maka*** T_A^{-1} ***memetakan kembali w ke x karena :***

$$T_{A^{-1}}(\mathbf{w}) = T_{A^{-1}}(T_A(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$$

$$[T^{-1}] = [T]^{-1}$$

Properties of Linear Transformations from R^n to R^m

Standard Matrix for T^{-1}

Show that the linear operator $T:R^2 \rightarrow R^2$ defined by the equations
$$\begin{aligned} w_1 &= 2x_1 + x_2 \\ w_2 &= 3x_1 + 4x_2 \end{aligned}$$
is one-to-one, and find $T^{-1}(w_1, w_2)$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \longrightarrow [T] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[T^{-1}] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \rightarrow [T^{-1}] = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5}w_1 - \frac{1}{5}w_2 \\ -\frac{3}{5}w_1 + \frac{2}{5}w_2 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}(w_1, w_2) = (\frac{4}{5}w_1 - \frac{1}{5}w_2, -\frac{3}{5}w_1 + \frac{2}{5}w_2)$$

Properties of Linear Transformations from R^n to R^m

Transformasi $T : R^n \rightarrow R^m$ adalah linier jika dan hanya jika hubungan ***u dan v pada R^n dan setiap skalar*** *c*

a. $T(u+v) = T(u) + T(v)$
b. $T(cu) = cT(u)$

Properties of Linear Transformations from R^n to R^m

Jika ***$T : R^n \rightarrow R^m$ adalah suatu transformasi linear, dan e_1, e_2 , …,e_n adalah vektor basis standar untuk R^n, maka matriks standart untuk*** *T adalah:*

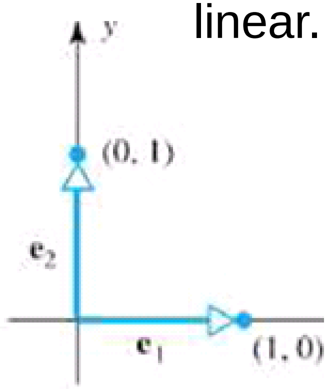
$$\boxed{[T] = [T(\mathbf{e}_1)\,|\,T(\mathbf{e}_2)\,|\cdots|\,T(\mathbf{e}_n)]}$$

Digunakan untuk mencari matriks-matriks standar dan menganalisis dampak geometris dari suatu operator linear.

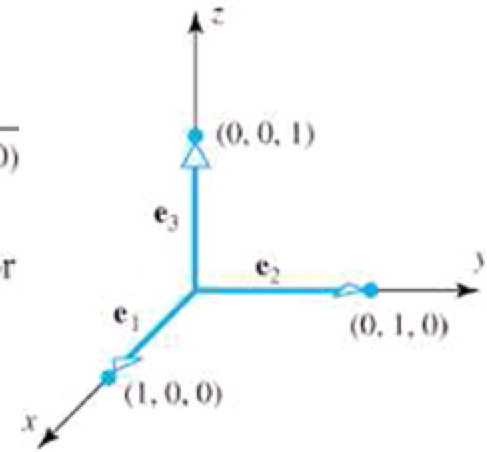
$$A = [T(\mathbf{e}_1)\,|\,T(\mathbf{e}_2)\,|\cdots|\,T(\mathbf{e}_n)]$$

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= x_1T(\mathbf{e}_1) + x_2T(\mathbf{e}_2) + \cdots + x_nT(\mathbf{e}_n) \\ &= T(x_1\mathbf{e}_1) + T(x_2\mathbf{e}_2) + \cdots + T(x_n\mathbf{e}_n) \\ &= T(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n) \\ &= T(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$



(a) Standard basis for



(b) Standard basis for R^3

Properties of Linear Transformations from R^n to R^m

Example

T: $R^3 \rightarrow R^3$ adalah proyeksi orthogonal pada bidang xy, dan terbukti secara geometris bahwa :

$$T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_3) = \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[T] = [T(\mathbf{e}_1) | T(\mathbf{e}_2) | \cdots | T(\mathbf{e}_n)] \Rightarrow [T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Interpretasi Geometris Vektor Eigen

Jika $A_{(nxn)}$, λ = eigenvalue dari A dimana ;

$$\mathbf{Ax=\lambda x} \qquad (\lambda = \text{skalar}),$$

$$\lambda x - Ax = 0$$

by inserting identity matrix:

$$\lambda x - Ax = 0$$

$$\mathbf{(\lambda I - A)x = 0} \Rightarrow \det(\lambda I - A) = 0$$

Jika T: $R^n \rightarrow R^n$ adalah suatu operator linier, maka suatu skalar **λ** disebut ***eigenvalue*** *dari T jika ada suatu x tidak nol pada* R^n *sedemikian sehingga*

$$T(x) = \lambda x$$

Vektor-vektor tak nol x yang memenuhi persamaan ini disebut **vektor eigen dari T yang berpadanan dengan λ.**

Interpretasi Geometris Vektor Eigen

Jika *A adalah matriks standar untuk T, maka :*

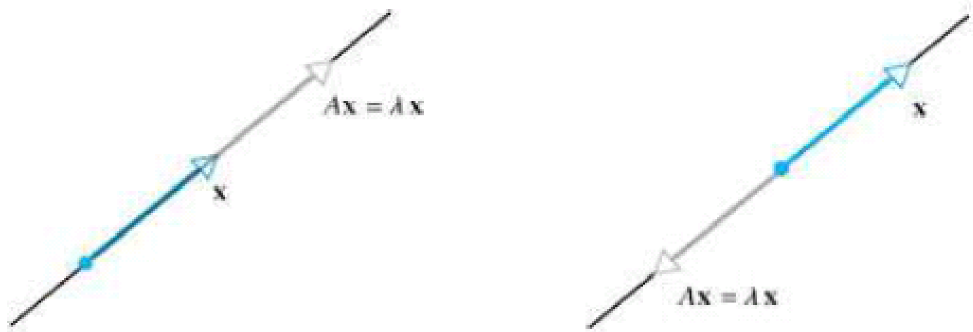
$$T(x) = \lambda x \quad \rightarrow \quad A(x) = \lambda x$$

Dimana:

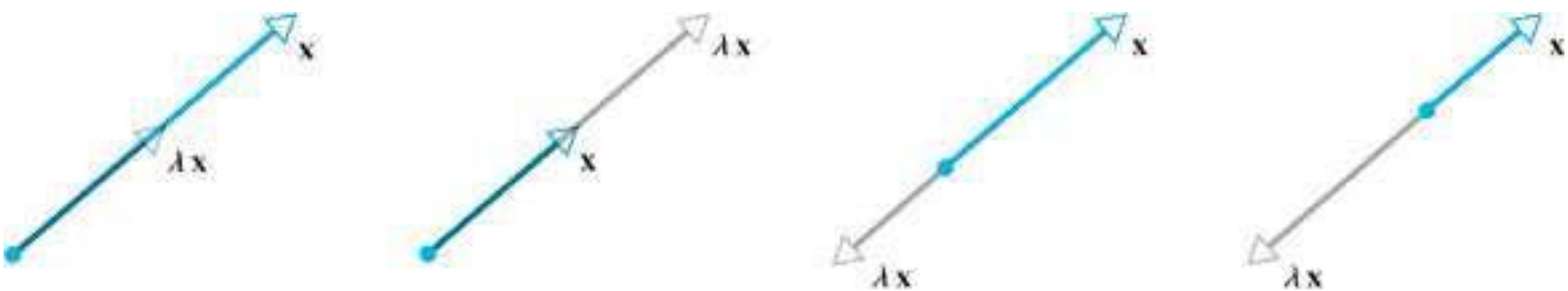
1. **Nilai eigen T tepat merupakan nilai eigen dari matrik standarnya A.**
2. ***X adalah suatu vektor eigen dari T yang berpadanan dengan λ jika dan hanya jika x adalah suatu vektor eigen dari A yang berpadanan dengan λ .***

Properties of Linear Transformations from R^n to R^m

Jika λ adalah nilai eigen dari *A an* ***x adalah vektor eigen , maka***
A(x) = λx → ***sehingga perkalian dengan A memetakan x kesuatu penggandaan dirinya sendiri***.
Pada R^2 dan R^3 → **perkalian dengan A memetakan setiap vektor eigen x ke suatu vektor yang terletak pada garis yang sama dengan x.**



(a) $\lambda \geq 0$ (b) $\lambda \leq 0$



(a) $0 \leq \lambda \leq 1$ (b) $\lambda \geq 1$ (c) $-1 \leq \lambda \leq 0$ (d) $\lambda \leq -1$

Eigenvalues of a Linear Operator

Contoh :

T:R³ → R³ be the **orthogonal projection on the xy-plane →** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(λI-A)x=0

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

Persamaan Karakteristik dari A adalah: $\boxed{\det(\lambda I - A) = 0}$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad or \qquad (\lambda - 1)^2 \lambda = 0$$

λ=0 λ=1

:

Properties of Linear Transformations from R^n to R^m

Vektor Eigen dari matriks A yang bersepadanan dengan nilai eigen λ adalah penyelesain tidak nol dari *:*

$$\begin{bmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jika λ=0

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$$

Jika λ=1

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s \\ t \\ 0 \end{bmatrix}$$